

УДК 517.863

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. И. Оселедец

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	179
§ 1. Определения и основные факты из теории характеристических показателей Ляпунова	182
§ 2. Мультипликативные коциклы над динамическими системами	187
§ 3. Мультипликативная эргодическая теорема. Формулировка и примеры	193
§ 4. Мультипликативная эргодическая теорема. Доказательство	197
Литература	210

Введение

Настоящая работа возникла под влиянием работ Я. Г. Синая по энтропийной теории классических динамических систем. После этих работ стало ясно, что положительность энтропии классической динамической системы связана с экспоненциальным разбеганием траекторий, выходящих из близких точек. Этим обстоятельством и объясняется интерес автора к проблеме экспоненциального разбегания.

Пусть X — гладкое многообразие, в котором действует классическая динамическая система. Например, X — евклидово пространство, а динамическая система задается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x),$$

где $f(x)$ — гладкая вектор-функция.

Обозначим через T_x^t состояние динамической системы в момент времени t , причем в момент времени 0 система была x . Возникает гладкий поток $\{T^t\}$:

$$T^{t+s} = T^t T^s.$$

Касательное пространство в точке x отображается линейно на касательное пространство в точке $T^t x$ с помощью дифференциала $(dT^t)_x$ (линейной части в точке x нелинейного отображения T^t). В случае системы дифференциальных уравнений в евклидовом пространстве R^n матрица дифференциала есть фундаментальная матрица неавтономной системы линейных дифференциальных уравнений (системы уравнений в вариациях):

$$\frac{dy}{dt} = f'(T^t x) y,$$

где матрица

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Пусть e — ненулевой вектор из касательного пространства в точке x . Допустим, что в X введена гладкая риманова метрика. Тогда отношение

$$\lambda_t(x) = \frac{\|dT_x^t \cdot e\|}{\|e\|}$$

называется коэффициентом растяжения по направлению

вектора e . Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(x) > 0$, то говорят, что по направлению вектора e имеет место экспоненциальное разбегание. Естественный вопрос здесь таков: насколько правильно ведет себя $\lambda_t(x)$, может ли коэффициент растяжения колебаться, т. е. существует ли точный показатель

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \lambda_t(x).$$

Тесно связана с этой следующая задача.

Пусть D — единичный шар в касательном пространстве в точке x . Образ этого шара при отображении $(dT^t)_x$ будет эллипсоидом в касательном пространстве в точке $T^t x$. Пусть $\mu_t^{(1)}(x) \geq \mu_t^{(2)}(x) \geq \dots \geq \mu_t^{(m)}(x)$ — полуоси этого эллипсоида. Спрашивается: существуют ли точные показатели этих полуосей

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu_t^{(i)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Если через точку x проходит замкнутая траектория, то положительный ответ на все эти вопросы очевиден. „Замечательным” обобщением было бы следующее утверждение: ответ положителен, если замыкание траектории, проходящей через точку x , есть компактное, минимальное и строго эргодическое множество. Это предположение неправдоподобно, и мне кажется, что эта задача не так безнадежна, как это может показаться, если учесть, что даже для условно-периодического случая ничего не сделано.

С другой стороны, заведомо существуют «неправильные» траектории, даже если X — компактное многообразие. Наш подход связан с нормированной инвариантной мерой μ для потока $\{T^t\}$:

$$\mu(T^t A) = \mu(A), \quad \mu(X) = 1.$$

Хорошо известно, что для компактного X и гладкого потока $\{T^t\}$ хотя бы одна такая мера найдется.

Естественно сказать, что динамическая система правильна, если существуют точные показатели всех коэффициентов растяжения и всех полуосей эллипсоида для почти всех x по мере μ . Из наших результа-

тов, в частности, следует, что классическая динамическая система правильна для любой инвариантной меры.

На самом деле оказывается, что классические системы правильны по Ляпунову для любой инвариантной меры, из чего вытекает правильность в указанном выше смысле. Правильные по Ляпунову системы (относительно меры μ) определены в конце § 2.

Аналогичная ситуация имеет место и для случая степеней одного преобразования T :

$$T^t = (T)^t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Заметим, что здесь

$$(dT^t)_x = (dT)_{T^{t-1}x} (dT)_{T^{t-2}x} \dots (dT)_x, \quad t \geq 1.$$

Если предположить, что касательное расслоение многообразия X есть прямое произведение, то предыдущее равенство можно переписать в виде

$$a_t(x) = a(T^{t-1}x) a(T^{t-2}x) \dots a(x), \quad t \geq 1,$$

где $a_t(x)$ — матрица, отвечающая $(dT^t)_x$, а $a(x)$ — матрица, отвечающая $(dT)_x$, т. е. для случая дискретного времени, мы имеем дело с матрицей $a_t(x)$, которая получается как произведение матриц $a(T^kx)$ вдоль траектории.

Случай непрерывного времени можно трактовать аналогичным образом.

И для дискретного и для непрерывного времени справедливо равенство

$$(dT^{t+s})_x = (dT^t)_{T^s x} (dT^s)_x.$$

Если касательное расслоение есть прямое произведение, то это равенство можно переписать в виде

$$\mathfrak{N}(t+s, x) = \mathfrak{N}(t, T^s x) \mathfrak{N}(s, x),$$

где $\mathfrak{N}(t, x)$ — матрица, отвечающая $(dT^t)_x$.

Функция $\mathfrak{N}(t, x)$, удовлетворяющая такому соотношению, называется мультипликативным коциклом относительно динамической системы $\{T^t\}$.

Если удалить из X некоторое множество меры 0, то касательное расслоение станет прямым произведением.

Таким образом, отправляясь от дифференциала группы гладких преобразований, мы приходим к мультипликативному коциклу. Если вместо дифференциала взять однопараметрическую группу изоморфизмов касательного расслоения, то мы также придем к некоторому мультипликативному коциклу. Например, фундаментальная матрица $\mathfrak{N}(t, x)$ системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = a(T^t x) y$$

будет мультипликативным коциклом такого вида.

Многочисленные примеры мультипликативных коциклов дает теория вероятностей. Достаточно рассмотреть какое-нибудь броуновское движение в группе невырожденных матриц.

Итак, основная схема такова. Пусть X — измеримое пространство с нормированной мерой μ , $\mu X = 1$, $\{T^t\}$ — измеримая однопараметрическая группа автоморфизмов пространства X ;

$$\mu(T^t A) = \mu(A).$$

t пробегает либо все целые, либо все действительные числа.

Рассматривается измеримый мультипликативный коцикл $\mathfrak{M}(t, x)$ относительно динамической системы $\{T^t\}$.

Мультипликативная эргодическая теорема, которая будет доказана в § 4, относится именно к этому случаю. Мы интересуемся поведением матрицы $\mathfrak{M}(t, x)$ при $t \rightarrow \pm \infty$. Даже для $m = 1$ этот вопрос нетривиален. Действительно, пусть $m = 1$, тогда

$$\frac{1}{t} \ln |\mathfrak{M}(t, x)| = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln |\mathfrak{M}(1, T^k x)|, \quad t = 1, 2, \dots$$

Дело сводится к эргодической теореме Биркгофа. Основная трудность для $m > 1$ заключается в некоммутативности группы $GL(m, R)$, а основная идея заключается в том, чтобы свести все к эргодической теореме Биркгофа. Этот прием использовали Ферстенберг и Кестен [3] для того, чтобы доказать, что для почти всех x по мере μ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathfrak{M}(t, x)\|, \quad t = 1, 2, \dots,$$

если

$$\int_X \ln^+ \|\mathfrak{M}(1, x)\| \mu(dx) < +\infty.$$

Из мультипликативной эргодической теоремы этот результат вытекает. Наши результаты можно рассматривать как обобщение теоремы Ферстенберга—Кестена.

§ 1. Определения и основные факты из теории характеристических показателей Ляпунова

В этом параграфе излагается теория показателей Ляпунова в удобной для нас форме. Мы следуем [1] и [2].

Пусть a_t — матричная функция, заданная либо на всей числовой прямой, либо на множестве целых чисел, причем для каждого t значение функции a_t есть невырожденная матрица порядка $m \times m$.

Для любой матрицы a обозначим через $\|a\|$ наибольшее собственное значение матрицы $\sqrt{a^* a}$, где a^* — транспонированная матрица. Это норма в пространстве матриц, причем $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$, кроме того она согласована со стандартной нормой в евклидовом пространстве R^m :

$$\|ae\| \leq \|a\| \|e\|,$$

$$\|a\| = \max_{e: \|e\|=1} \|a \cdot e\|, \quad e \in R^m.$$

Рассматриваются лишь те функции a_t , для которых

$$\max \{\|a_t\|, \|a_t^{-1}\|\} \leq e^{j|t|} \quad (1)$$

при $t \rightarrow \pm \infty$, j — некоторая константа.

Заметим, что $\|a^{-1}\|$ есть число, обратное к наименьшему собственному значению матрицы $\sqrt{a^*a}$.

Характеристическим показателем числовой функции φ_t называется

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} \ln |\varphi_t|,$$

т. е. у φ_t есть два показателя: показатель при $t \rightarrow +\infty$ и показатель при $t \rightarrow -\infty$.

Одномерный показатель Ляпунова функции a_t определяется формулой

$$\chi_{\pm}(e; a) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|a_t \cdot e\|, \quad (2)$$

где e — ненулевой вектор из евклидова пространства R^m .

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ — ортонормированный k -репер в R^m . Обозначим через e^k пространство, порожденное векторами $e_1, e_2, \dots, e_k$, а через $\lambda(e^k, a_t)$ обозначим объем параллелепипеда, построенного на векторах $a_t \cdot e_1, a_t \cdot e_2, \dots, a_t \cdot e_k$. $\lambda(e^k, a_t)$ называется коэффициентом растяжения по направлению e^k . Он зависит лишь от e^k и не зависит от выбора в e^k ортонормированного k -репера. Для одномерного подпространства e^1 коэффициент растяжения есть $\|a_t \cdot e_1\|$.

Коэффициент растяжения можно определить так же, как модуль определителя отображения $e^k \rightarrow a_t \cdot e^k$, которое задается матрицей a_t .

k — мерный характеристический показатель Ляпунова определяется формулой:

$$\chi_{\pm}(e^k; a) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda(e^k, a_t). \quad (2)$$

Обобщенная лемма Адамара [2], [4].

Пусть $e^{k+r} = e^k \oplus e^r$, тогда

$$\lambda(e^{k+r}, a) \leq \lambda(e^k, a) \cdot \lambda(e^r, a).$$

Доказательство. Пусть P — ортогональное проектирование на ортогональное дополнение к $a \cdot e^k$ в $a \cdot e^{k+r}$, Q — ортогональное проектирование на $a \cdot e^r$ в $a \cdot e^{k+r}$. Рассмотрим самосопряженный оператор $A = \sqrt{P \cdot Q}$, действующий в ортогональном дополнении к $a \cdot e^k$ в $a \cdot e^{k+r}$. Тогда $\lambda(e^{k+r}, a) = \lambda(e^k, a) \cdot \lambda(e^r, a) \cdot \det A$, где $\det A$ — определитель оператора A . Так как $\det A \leq 1$, то лемма доказана.

Из этой леммы, в частности, вытекает оценка

$$\lambda(e^k, a_t) \leq \|a_t \cdot e_1\| \cdot \|a_t \cdot e_2\| \cdot \dots \cdot \|a_t \cdot e_k\|,$$

где $\|e_i\| = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, вектора $e_1, e_2, \dots, e_k$ лежат в e^k и линейно независимы.

Так как $\|a_t \cdot e_i\| \leq \|a_t\| \cdot \|e_i\| = \|a_t\|$, то $\lambda(e^k, a_t) \leq \|a_t\|^k$. Кроме того, $\lambda(e^k, a_t) \geq \|a_t^{-1}\|^{-k}$, так как

$$\|a_t^{-1}\|^k \geq \lambda(a_t \cdot e^k, a_t^{-1}) = \frac{1}{\lambda(e^k, a_t)}.$$

Из этого и (1) следует конечность всех показателей.

Из определения показателей вытекает, что показатели не зависят от выбора скалярного произведения в R^m , т. е. они являются аффинными инвариантами.

Далее мы часто не будем указывать зависимость показателя от функции a_t , и так как случай, когда $t \rightarrow -\infty$, совершенно аналогичен случаю $t \rightarrow +\infty$, вместо $\chi_{\pm}(e^k; a)$ будем писать

$$\chi(e^k) = \chi_+(e^k; a), \quad \chi(e) = \chi_+(e; a), \quad e \in R^m.$$

Имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \lambda(e^k, u_t \cdot a_t) &= \lambda(e^k, a_t), \quad \chi_{\pm}(e^k, u \cdot a) = \chi_{\pm}(e^k; a), \\ \lambda(e^k, a \cdot u^0) &= \lambda(u^0 \cdot e^k, a), \quad \chi_{\pm}(e^k, a \cdot u^0) = \chi_{\pm}(u^0 \cdot e^k; a), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_t при каждом t , как и матрица u^0 , ортогональная матрица.

Приведем следующие, легко проверяемые утверждения [1], [2]:

- а) $\chi(c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2) \leq \max \{\chi(e_1), \chi(e_2)\}$;
- б) Функция $\chi(e)$ принимает не более m различных значений;
- в) Если $e_1, e_2, \dots, e_m$ — базис в R^m , то

$$\sum_{i=1}^m \chi(e_i) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \cdot \ln |\det a_t|, \quad (4a)$$

где $\det a_t$ — определитель матрицы a_t .

Согласно А. М. Ляпунову (см. [1], [2]) базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ называется нормальным, если $\sum_{i=1}^m \chi(e_i)$ достигает минимума на этом базисе. Нормальный базис характеризуется отсутствием понижающей комбинации, т. е. если $e = \sum_{r=1}^s c_r \cdot e_{i_r}$, где каждое c_r не равно нулю, то неравенство

$$\chi(e) < \max \{\chi(e_{i_1}), \chi(e_{i_2}), \dots, \chi(e_{i_s})\}$$

невозможно.

А. М. Ляпунов строил нормальный базис из любого, переходя последовательно к понижающим комбинациям и замечая, что этот процесс обрывается.

Согласно А. М. Ляпунову функция a_t называется правильной при $t \rightarrow +\infty$, если для некоторого нормального базиса $e_1, e_2, \dots, e_m$ выполнено соотношение

$$\sum_{i=1}^m \chi(e_i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\det a_t|. \quad (5)$$

Из (4с) следует, что для правильной функции a_t функция $\det a_t$ имеет точный показатель, т. е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\det a_t| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\det a_t|. \quad (5')$$

Заметим, что в определении правильной функции из «для некоторого» следует «для любого».

Определим теперь спектр характеристических показателей (χ_i, k_i) , $i = 1, 2, \dots, r$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ — нормальный базис, $\chi(e_1), \chi(e_2), \dots, \chi(e_m)$ — показатели этих векторов. Пусть число χ встречается в ряду этих чисел $k(\chi)$ раз. Пусть $k_i = k(\chi_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Набор (χ_i, k_i) , $i = 1, 2, \dots, r$ и есть спектр характеристических показателей. Можно под спектром понимать и функцию $k(\chi)$. Функция $k(\chi)$ не зависит от выбора нормального базиса.

Для правильной функции (5) дает, что

$$\sum_{i=1}^r k_i \chi_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln |\det a_t|. \quad (6)$$

Рассмотрим подпространство e^{k_i} , порожденное векторами нормального базиса с показателем χ_i :

$$R^m = \bigoplus \sum_{i=1}^r e^{k_i}.$$

Из обобщенной леммы Адамара следует, что

$$\chi(R^m) \leq \sum_{i=1}^r \chi(e^{k_i}), \quad \chi(e^{k_i}) \leq k_i \chi_i. \quad (7)$$

Так как $\sum_{i=1}^r k_i \chi_i = \chi(R^m)$ в силу (6), то из (7) следует, что

$$\chi(e^{k_i}) = k_i \chi_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (8)$$

Показатель вектора $e \in e^{k_i}$ равен χ_i , так как нельзя составить понижающей комбинации в силу нормальности базиса.

Пусть $e^k \subseteq e^{k_i}$, тогда $e^{k_i} = e^k \oplus e^{k-k_i}$.

Далее

$$\chi(e^{k_i}) \leq \chi(e^k) + \chi(e^{k-k_i}),$$

$$\chi(e^k) \leq k \chi_i,$$

$$\chi(e^{k_i-k}) \leq (k_i - k) \chi_i.$$

Так как $\chi(e^{k_i}) = k_i \chi_i$, то из этих неравенств следует, что

$$\chi(e^k) = k \chi_i, \quad \text{где } e^k \subseteq e^{k_i}. \quad (9)$$

Теорема [1], [2]. Если функция a_t правильна, то существуют точные показатели всех порядков, т. е.

$$\chi(e^k; a) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \lambda(e^k, a_t).$$

Доказательство. Без ограничения общности в силу (5') можно считать, что $\det a_t = 1$. С другой стороны, достаточно доказать теорему лишь для подпространства e^k , порожденного векторами $e_m, e_{m-1}, \dots, e_{m-k+1}$ стандартного базиса в R^m . Действительно, любое k -мерное подпространство имеет вид $u \cdot e^k$, где u — ортогональная матрица, и наше утверждение следует из второй формулы в (3).

Матрица a_t однозначно разлагается в произведение ортогональной матрицы u_t и нижней треугольной матрицы $\tilde{a}_t$ с положительными диагональными элементами:

$$a_t = u_t \cdot \tilde{a}_t.$$

Из первой формулы в (3) немедленно следует, что теорему достаточно доказать для функции $\tilde{a}_t$. Но

$$\lambda(e^k, a_t) = \prod_{i=m}^{m-k+1} \tilde{a}_t^{(i)},$$

где $\tilde{a}_t^{(i)}$ — i -тый диагональный коэффициент матрицы, т. е. достаточно доказать существование пределов:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(i)}. \quad (10)$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\sum_{i=1}^m \chi_i = 0, \text{ где } \chi_i = \overline{\lim_{t \rightarrow +\infty}} \frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(i)}. \quad (11)$$

Действительно, пусть выполнено (11). Но

$$\frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(i)} = - \sum_{j \neq i} \frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(j)}, \text{ так как } \det \tilde{a}_t = 1.$$

Для $\varepsilon > 0$ при больших t будет

$$\frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(j)} \leq \chi_j + \varepsilon,$$

откуда

$$\frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(i)} \geq - \sum_{j \neq i} (\chi_j + \varepsilon) = - \sum_{j \neq i} \chi_j - (m-1)\varepsilon = \chi_i - (m-1)\varepsilon,$$

т. е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \tilde{a}_t^{(i)} \geq \chi_i$, что и влечет (10).

Идея А. М. Ляпунова заключается в том, чтобы показать существование нормального базиса $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m$, для которого $\chi(\tilde{f}_i) \geq \chi_i$, а тогда из правильности функции $\tilde{a}_t$ будет следовать, что

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \chi_i \leq \sum_{i=1}^m \chi(\tilde{f}_i) = 0,$$

т. е. (11) будет выполнено.

Приведем красивое построение А. М. Ляпунова. Положим $\tilde{f}_m = e_m$ и допустим, что $\tilde{f}_m, \tilde{f}_{m-1}, \dots, \tilde{f}_{m-k+1}$ уже выбраны. Укажем $\tilde{f}_{m-k}$. Любой вектор $\tilde{f}$ из $e^{k+1} - e^k$ с точностью до умножения на константу имеет вид

$$\tilde{f} = e_{m-k} + \hat{e}_{m-k},$$

где $\hat{e}_{m-k} \in e^k$.

Функция $\chi(f) = \chi(e_{m-k} + \widehat{e}_{m-k})$ как функция от $\widehat{e}_{m-k}$ принимает лишь конечное число значений, т. е. найдется такой $\widehat{e}_{m-k}^{\min}$, для которого она минимальна. Положим

$$f_{m-k} = e_{m-k} + \widehat{e}_{m-k}^{\min}.$$

Прежде всего имеем

$$\widetilde{a}_t f_i = \widetilde{a}_t e_i + \widetilde{a}_t \widehat{e}_i^{\min} = \widetilde{a}_t^{(i)} e_i + \widehat{e}_{i,t},$$

где вектор $\widehat{e}_{i,t} \in e^{m-i}$, т. е. e_i ортогонален к $\widehat{e}_{i,t}$. Отсюда

$$\|\widetilde{a}_t f_i\| \geq \widetilde{a}_t^{(i)},$$

т. е. $\chi(f_i) \geq \chi_i$.

Осталось показать, что $\{f_i\}$ — нормальный базис.

Пусть это не так, т. е. существует вектор f такой, что

$$f = c_1 f_{i_1} + c_2 f_{i_2} + \dots + c_s f_{i_s}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_s,$$

все c_i не равны нулю,

$$\chi(f) < \max \{\chi(f_{i_1}), \chi(f_{i_2}), \dots, \chi(f_{i_s})\}.$$

Так как f имеет вид $c_1 e_{i_1} + \widehat{e}_{i_1}$, то $\chi(f) \geq \chi(f_{i_1})$ в силу выбора вектора f_{i_1} . Но

$$\chi(f - c_1 f_{i_1}) \leq \max \{\chi(f), \chi(f_{i_1})\} = \chi(f)$$

в силу (4а).

Так как

$$\chi(f) \geq \chi(f_{i_1})$$

и

$$\chi(f) < \max \{\chi(f_{i_1}), \chi(f_{i_2}), \dots\},$$

то

$$\chi(f) < \max \{\chi(f_{i_2}), \chi(f_{i_3}), \dots, \chi(f_{i_s})\},$$

т. е.

$$\chi(f - c_1 f_{i_1}) < \max \{\chi(f_{i_2}), \dots, \chi(f_{i_s})\}.$$

Продолжая это рассуждение дальше, приходим к противоречию.

Теорема доказана.

Простой пример показывает, что обращение этой теоремы неверно, т. е. из существования точных показателей не следует правильность системы.

Именно, пусть $a_t = \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Двумерный показатель равен нулю, так как $\det a_t = 1$.

Для любого ненулевого вектора e из R^2 показатель равен 1. Любой базис нормальный, но $2 = \chi(e_1) + \chi(e_2) > \chi(R^2) = 0$.

§ 2. Мультипликативные коциклы над динамическими системами

Пусть X — пространство Лебега с нормированной мерой μ , $\mu(X) = 1$. Рассмотрим однопараметрическую группу $\{T^t\}$ автоморфизмов пространства X :

$$a) \quad T^{t+s} = T^t T^s; \tag{1}$$

в) $f(T^t x)$ — измеримая функция от (t, x) , если $f(x)$ — измеримая функция от x .

Напомним, что автоморфизмом T пространства Лебега X с мерой μ называется измеримое вместе с обратным взаимно-однозначное преобразование, сохраняющее меру μ [7].

Параметр t пробегает либо группу всех целых чисел, либо группу действительных чисел.

Для целых t условие (1в) излишне, а для группы действительных чисел (1в) определяет то, что называется измеримым потоком. Еще одно замечание связано с тем обстоятельством, что в теории меры пренебрегают множествами меры 0, например поток $\{T^t\}$ называется измеримым, если он становится таким после удаления из X множества меры 0.

Пусть $\mathfrak{N}(t, x)$ — измеримый коцикл относительно динамической системы $\{T^t\}$ со значениями в группе $GL(m, R)$, т. е. $\mathfrak{N}(t, x)$ — измеримая функция от (t, x) , причем

$$\mathfrak{N}(t + s, x) = \mathfrak{N}(t, T^s x) \mathfrak{N}(s, x). \quad (2)$$

Мы определили мультипликативный коцикл.

Ясно, как определяются аддитивные коциклы. Например, пусть $\alpha(t, x)$ — действительная измеримая функция от (t, x) , причем

$$\alpha(t + s, x) = \alpha(t, T^s x) + \alpha(s, x).$$

Тогда $\alpha(t, x)$ будет аддитивным коциклом.

Пусть $\alpha(t, x) = \ln |\det \mathfrak{N}(t, x)|$. Из (2) следует, что $\alpha(t, x)$ — одномерный аддитивный коцикл. Этот коцикл мы подробно рассмотрим дальше.

Дадим еще одно определение. Коциклы $\tilde{\mathfrak{N}}$ и $\mathfrak{N}$ называются гомологичными, если существует такая измеримая функция $C(x)$ со значениями в $GL(m, R)$, что

$$C^{-1}(T^t x) \mathfrak{N}(t, x) C(x) = \tilde{\mathfrak{N}}(t, x). \quad (3)$$

Про функцию $C(x)$ будем говорить, что она осуществляет гомологию коциклов $\mathfrak{N}$ и $\tilde{\mathfrak{N}}$.

Назовем функцию $C(x)$ ляпуновской, если

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|C^{\pm 1}(T^t x)\| = 0$$

для почти всех x по мере μ .

Пусть $C(x)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \ln^+ \|C^{\pm 1}(T^\theta x)\| \in L^1(X, \mu). \quad (4)$$

Такая $C(x)$ будет ляпуновской. Действительно, пусть $t \rightarrow +\infty$, тогда

$$\begin{aligned} \ln \|C^{\pm 1}(T^t x)\| &\leq \ln^+ \|C^{\pm 1}(T^{[t] + \{t\}} x)\| \leq \\ &\leq \sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \ln^+ \|C^{\pm 1}(T^\theta(T^{[t]} x))\| = \varphi(T^{[t]} x), \end{aligned}$$

где $\varphi(x) \in L^1(X, \mu)$.

Отсюда

$$\frac{1}{t} \ln \|C^{\pm 1}(T^t x)\| \leq \frac{1}{t} \varphi(T^{[t]} x) = \frac{[t]}{t} \frac{1}{[t]} \varphi(T^{[t]} x).$$

Но $\frac{[t]}{t} \rightarrow 1$, а $\frac{\varphi(T^{[t]} x)}{[t]} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, так как ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(x : \varphi(T^k x) \geq k\varepsilon) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(x : \varphi(x) \geq k\varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$, сходится одновременно с интегралом

$$\int_0^{+\infty} \mu(x : \varphi(x) \geq t\varepsilon) dt = \frac{\int \varphi(x) \mu(dx)}{\varepsilon}.$$

Поэтому,

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|C^{\pm 1}(T^t x)\| \leq 0.$$

Но

$$\|C(T^t x)\| \|C^{-1}(T^t x)\| \geq 1,$$

т. е.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|C^{\pm 1}(T^t x)\| = 0.$$

Аналогично разбирается случай, когда $t \rightarrow -\infty$.

Гомологию мы будем называть ляпуновской, если она осуществляется ляпуновской функцией $C(x)$.

Следующее условие является основным в этой работе. Мы будем рассматривать лишь те коциклы $\mathfrak{N}$, для которых

$$\sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \ln^+ \|\mathfrak{N}^{\pm 1}(\theta, x)\| \in L^1(X, \mu). \quad (5)$$

Из (5) следует оценка:

$$\|\mathfrak{N}(t, x)\| \leq e^{j(x)|t|} \quad (6)$$

при $t \rightarrow \pm \infty$ для почти всех x по мере μ , $j(x)$ — измеримая инвариантная функция.

Действительно,

$$\ln \|\mathfrak{N}(t+s, x)\| \leq \ln \|\mathfrak{N}(t, T^s x)\| + \ln \|\mathfrak{N}(s, x)\|$$

и рассматривая случай, когда $t \rightarrow +\infty$ (случай, когда $t \rightarrow -\infty$ разбирается аналогично), можем написать, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \|\mathfrak{N}(t, x)\| &\leq \frac{1}{t} \ln^+ \|\mathfrak{N}(t, x)\| \leq \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{[t]} \ln^+ \|\mathfrak{N}(1, T^k x)\| + \\ &\quad + \frac{1}{t} \ln^+ \|\mathfrak{N}(\{t\}, T^{[t]} x)\|, \end{aligned}$$

$$\ln^+ \|\mathfrak{N}(\{t\}, x)\| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \ln^+ \|\mathfrak{N}(\theta, x)\| = \varphi(x) \in L^1(X, \mu).$$

Но, как это было раньше, $\frac{\varphi(T^k x)}{k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ для почти всех x по мере μ . Отсюда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln^+ \|\mathfrak{M}(t, x)\| \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{[t]} \sum_{k=0}^{[t]} \ln^+ \|\mathfrak{M}(1, T^k x)\| \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{[t]} \sum_{k=0}^{[t]} \varphi(T^k x).$$

Последний предел существует для почти всех x по мере μ в силу эргодической теоремы Биркгофа. Из той же теоремы следует инвариантность этого предела.

Из условия (6) следует, что коцикл $\mathfrak{M}(t, x)$, рассматриваемый как функция от t при фиксированном x , для почти всех x удовлетворяет условию 1 § 1, т. е. для коциклов $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию (5), для почти всех x определен спектр характеристических показателей

$$(\chi_i, k_i), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Функции $\chi_i = \chi_i(x)$, $k_i = k_i(x)$, $r = r(x)$ измеримы, так как измерима функция $\chi(x, e)$ от (x, e) .

Набор (χ_i, k_i) , $i = 1, 2, \dots, r$ назовем спектром коцикла $\mathfrak{M}$. Гомологичные по Ляпунову коциклы $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ имеют один и тот же спектр характеристических показателей. Это утверждение следует из оценок:

$$\ln \|C(T^t x)\| + \ln \|\tilde{\mathfrak{M}}(t, x) C^{-1}(x) e\| \leq \ln \|\mathfrak{M}(t, x) e\|,$$

$$\ln \|C^{-1}(T^t x)\| + \ln \|\mathfrak{M}(t, x) C(x) e\| \leq \ln \|\tilde{\mathfrak{M}}(t, x) e\|.$$

Спектр характеристических показателей не является полной системой инвариантов относительно ляпуновских гомологий. Рассмотрим совсем простой пример. Пусть X — единичная окружность с обычной мерой Лебега, а T^t — поворот окружности на угол $2\pi t\alpha$, где α — иррациональное число, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. $T^t = (T)^t$, где T — поворот на угол $2\pi\alpha$. За $\mathfrak{M}$ возьмем функцию $(-1)^t$, а за $\tilde{\mathfrak{M}}$ возьмем функцию, равную 1 на всей окружности. Очевидно, что это два одномерных мультипликативных коцикла относительно T^t . Допустим, что

$$C^{-1}(T^t x) (-1)^t C(x) = 1.$$

Тогда

$$|C(T^t x)| = |C(x)|,$$

и так как $\{T^t\}$ — эргодическая динамическая система, ибо α — иррационально, то $|C(x)| = \text{const}$. Без ограничения общности можно считать, что $|C(x)| = 1$. Но равенство

$$C(T^t x) = (-1)^t C(x),$$

где $C(x)$ — измеримая функция, $|C(x)| = 1$, невозможно в силу иррациональности α . Это легко доказать, например, с помощью разложения в ряд Фурье.

Ясно, что спектры коциклов $\mathfrak{M}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}$ совпадают, так как $|(-1)^t| = 1$.

Пусть E — измеримое пространство, а ζ — измеримое разбиение пространства E [6], т. е. существует счетная система измеримых множеств, составленных из целых элементов разбиения ζ , разделяющих элементы C_ζ разбиения ζ . Мы предположим, что $E/\zeta = X$ (фактор-пространство про-

пространства E по разбиению ζ) является пространством Лебега с мерой μ , т. е. X изоморфно mod 0 отрезку числовой прямой с обычной мерой Лебега, к которому, быть может, присоединено конечное или счетное число точек положительной меры. Соответственно, $C_{\zeta}(\tilde{x})$ — элемент разбиения ζ , проходящий через точку $\tilde{x}$, может быть определен не для всех $\tilde{x}$.

Обозначим через p проекцию E на X : $p\tilde{x} = C_{\zeta}$, если $\tilde{x} \in C_{\zeta}$.

Элемент $C_{\zeta}(x)$ будем называть также *слоем*, проходящим через точку $\tilde{x}$.

Пусть $m = m(x)$ — положительная целочисленная измеримая функция (по mod 0).

$$A_k = \{x : m(x) = k\},$$

R^k — k — мерное евклидово пространство. Обозначим через $X \times R^m$ объединение

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} (A_k \times R^k),$$

а через p_0 проекцию:

$$p_0(x \times R^{m(x)}) = x,$$

где $x \times R^{m(x)} = x \times R^k$, если $x \in A_k$.

Пусть φ такое взаимно однозначное mod 0 и измеримое вместе с обратным отображение измеримого пространства $X \times R^m$ на измеримое пространство E , что

а) $\varphi\zeta_0 = \zeta$, где ζ_0 — разбиение пространства $X \in R^m$ на элементы $x \times R^{m(x)}$;

в) φ^* — тождественное отображение X на себя, где $\varphi^* = p\varphi p_0^{-1}$.

Четверка (E, ζ, φ, m) задает измеримое расслоение. Четверка (E, ζ, ψ, m) задается то же самое измеримое расслоение, если

$$(\psi^{-1}\varphi)(x, e) = (x, a(x) \cdot e),$$

где $(x, e) \in x \times R^{m(x)}$, $a(x)$ — невырожденная матрица порядка $m(x) \times m(x)$, матричная функция $a(x)$ измерима $\ln \|a^{\pm 1}\| \in L^1$.

Типичный пример измеримого расслоения, который встречается дальше, таков: в слое $x \times R^m$ прямого произведения $X \times R^m$ рассмотрим линейное подпространство F_x .

Расслоение F с базой X и слоем F_x будет измеримым, если функция F_x измерима, т. е. прообразы открытых множеств соответствующего многообразия Грассмана при этом отображении измеримы.

F будем называть измеримым подрасслоением измеримого расслоения $E = X \times R^m$.

Взаимно-однозначное mod 0, измеримое вместе со своим обратным отображение $\tilde{T}$, назовем измеримым изоморфизмом, если оно сохраняет слои, т. е. если $\tilde{T}\zeta = \zeta$, а отображение слоя на слой (слой $\equiv$ элемент разбиения ζ) есть изоморфизм линейных пространств. Мы требуем, чтобы на базе $X = E/\zeta$ фактор-изоморфизм T , определяемый очевидным образом, был бы автоморфизмом пространства Лебега X с мерой μ .

Ясно, что разбиение пространства X на измеримые множества $A_k = \{x : m(x) = k\}$ инвариантно относительно T . В частности, если T — эргодический автоморфизм, то разбиение на множества A_k тривиально, т. е. это разбиение, единственным элементом которого является все X .

Если $a(x)$ — измеримая матричная функция, $\det a(x) \neq 0$, то $\tilde{T}$, заданное формулой

$$\tilde{T}(x, e) = (Tx, a(x)e),$$

где $(x, e) \in x \times R^{m(x)}$, будет измеримым изоморфизмом измеримого расслоения $E = W \times R^m$.

Любой измеримый изоморфизм изоморфен mod 0 такому.

С каждым измеримым коциклом π относительно динамической системы $\{T^t\}$ связана однопараметрическая группа измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$:

$$\tilde{T}^t(x, e) = (T^t x, \pi(t, x)e). \quad (7)$$

Определение однопараметрической группы измеримых изоморфизмов вполне аналогично определению измеримого потока (если время непрерывно).

Если время дискретно, то

$$\pi(t, x) = \prod_{k=0}^{t-1} \pi(1, T^k x), \quad t \geq 1, \quad (8)$$

$$\pi(t, x) = \prod_{k=-1}^t \pi^{-1}(1, T^k x), \quad t \leq -1,$$

$$\pi(0, x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае все сводится к степеням измеримого изоморфизма $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}(x, e) = (Tx, \pi(1, x) \cdot e).$$

Пусть F — измеримое подрасслоение измеримого расслоения E , в котором действует группа $\{\tilde{T}^t\}$.

Назовем F инвариантным, если $\tilde{T}^t F = F$, т. е., если $\tilde{T}^t F_x = F_{T^t x}$ для почти всех x по мере μ .

Через E^k будет обозначаться измеримое расслоение с функций размерности $k = k(x)$, т. е. размерность слоя E_x^k в точке x равна $k(x)$.

Спектр характеристикских показателей однопараметрической группы измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$ будем называть спектром отвечающего ей коцикла.

Коцикл π назовем правильным по Ляпунову, если для почти всех x по мере μ функция $\pi(t, x)$ как функция от t правильна по Ляпунову.

Однопараметрическую группу измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$ назовем *правильной* по Ляпунову, если отвечающий ей коцикл правилен по Ляпунову.

Мы говорим, что $\{\tilde{T}^t\}$ удовлетворяет условию (5) § 2, если отвечающий ей коцикл удовлетворяет условию (5) § 2.

§ 3. Мультипликативная эргодическая теорема. Формулировка и примеры

Теорема 1. Если выполнено условие (5) § 2, то однопараметрическая группа измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$ правильна по Ляпунову при $t \rightarrow \pm \infty$.

Из этой теоремы и теоремы § 1 вытекает.

Теорема 2. Если выполнено условие (5) § 2, то для почти всех x по мере μ существуют точные характеристические показатели Ляпунова всех порядков, т. е.

$$\chi_{\pm}(x, e^k; n) = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda(e^k, n(t, x)),$$

где $\lambda(e^k, n(t, x))$ — коэффициент растяжения по k -мерному направлению e^k .

Теорема 3. Для почти всех x по мере μ существуют пределы:

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \mu_t^{(i)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где $\mu_t^{(1)}(x) \geq \mu_t^{(2)}(x) \geq \dots \geq \mu_t^{(m)}(x)$ — сингулярные числа матрицы $n(t, x)$, т. е. собственные числа матрицы $\sqrt{n^*(t, x) \cdot n(t, x)}$.

Следствие. Для почти всех x по мере μ существуют пределы:

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \|n(t, x)\|_k,$$

где

$$\|n(t, x)\|_k = \max_{e^k} \lambda(e^k, n(t, x)) = \mu_t^{(1)}(x) \cdot \mu_t^{(2)}(x) \dots \mu_t^{(k)}(x).$$

Теорема 4. Пусть однопараметрическая группа измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$, действующая в измеримом расслоении E^m , удовлетворяет условию (5) § 2.

Тогда E^m раскладывается в прямую сумму инвариантных измеримых расслоений E^{k_i} :

$$E^m = \bigoplus_{i=1}^r E^{k_i}.$$

причем для почти всех x по мере μ

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \|n(t, x) e\| = \pm \chi_i, \quad i = 1, 2, \dots, r$$

равномерно по $e \in E_x^{k_i}$, $\|e\| = 1$, где (χ_i, k_i) — спектр группы $\{\tilde{T}^t\}$.

Если $e^k \in E_x^{k_i}$, то

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda(e^k, n(t, x)) = \pm k \chi_i, \quad k \geq 0$$

равномерно по $e^k \in E_x^{k_i}$ для почти всех x по мере μ .

Рассмотрим теперь примеры к теоремам 1, 2, 3, 4.

Рассмотрим сначала случай дискретного времени. Тогда в силу (5) § 2

$$\mathfrak{n}(t, x) = a(T^{t-1}x) a(T^{t-2}x) \dots a(x), \quad t \geq 1,$$

где $\mathfrak{n}(1, x) = a(x)$.

Из условия (5) § 2 следует, что

$$\int_X \ln^+ \|a^{\pm 1}(x)\| \mu(dx) < +\infty.$$

При этом условии существуют точные показатели для $\|\mathfrak{n}(t, x) \cdot e\|$ и для всех полуосей эллипсоида, т. е. для $\mu_t^{(i)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$. В частности, существует конечный предел

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu_t^{(1)}(x) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathfrak{n}(t, x)\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|a(T^{t-1}x) \cdot a(T^{t-2}x) \dots a(x)\|. \end{aligned}$$

Именно это утверждение и есть теорема Ферстенберга—Кестена, правда, мы несколько изменили формулировку, используя другую норму для матриц, к тому же в [3] теорема сформулирована в несколько более общем виде.

Рассмотрим теперь систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = a(T^t x) y, \quad (1)$$

где измеримая матричная функция $a(x)$ удовлетворяет условию:

$$\|a(x)\| \in L^1(X, \mu). \quad (2)$$

Рассмотрим функцию $\|a(T^s x)\|$ (при фиксированном x) от переменного s , $0 \leq s \leq t$. Для почти всех x эта функция интегрируема на $[0, t]$ по мере Лебега. Действительно, по теореме Тонелли [5]

$$\begin{aligned} \int_X \left[\int_0^t \|a(T^s x)\| ds \right] \mu(dx) &= \int_0^t \left[\int_X \|a(T^s x)\| \mu(dx) \right] ds = \\ &= t \cdot \int_X \|a(x)\| \mu(dx) < +\infty, \end{aligned}$$

откуда и следует наше утверждение.

Так как матричная функция $a(T^s x)$ от переменного s , $0 \leq s \leq t$, измерима и $\|a(T^s x)\|$ интегрируема на $[0, t]$ по мере Лебега, то система (1) имеет единственное решение y_t , $y_0 = e \in R^m$ [8].

Из доказательства этого утверждения методом последовательных приближений следует, что фундаментальная матрица $\mathfrak{n}(t, x)$ системы (1), определенная соотношением

$$\mathfrak{n}(t, x) e = y_t, \quad y_0 = e,$$

будет измеримой функцией от пары переменных (t, x) . К тому же

$$\mathfrak{n}(t+s, x) = \mathfrak{n}(t, T^s x) \mathfrak{n}(s, x),$$

т. е. фундаментальная матрица системы (1) есть коцикл со значениями в группе $GL(m, R)$.

Далее (см. [2]).

$$\frac{d}{dt} \ln \|n^{\pm 1}(t, x)\| \leq \|a(T^t x)\|,$$

т. е.

$$\ln \|n^{\pm 1}(t, x)\| \leq \left| \int_0^t \|a(T^s x)\| ds \right|. \quad (3)$$

Из (3) следует, что

$$\begin{aligned} \sup_{-1 < \theta \leq 1} \ln^+ \|n^{\pm 1}(\theta, x)\| &\leq \sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \left| \int_0^\theta \|a(T^s x)\| ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|a(T^s x)\| ds + \int_{-1}^0 \|a(T^s x)\| ds \in L^1(X, \mu) \end{aligned}$$

по той же теореме Тонелли [5].

Условие (5) § 2 выполнено, т. е. для системы (1) при выполнении условия (2) доказана ее правильность, существование точных показателей и т. д.

В этом примере коцикл $n(t, x)$ для почти каждого x — непрерывная функция от t , дифференцируемая для почти каждого t .

В следующем примере $n(t, x)$ будет кусочно непрерывной функцией от t .

Приведем сначала определение специального потока (см. [7] стр. 11). Пусть X_0 — пространство Лебега с мерой μ_0 , $f(x_0)$ — положительная интегрируемая функция на X_0 и T — автоморфизм пространства X_0 . Обозначим через X подпространство прямого произведения $X_0 \times (s)$ на числовую прямую (s) , составленное из точек (x_0, s) , для которых $0 \leq s < f(x_0)$, и положим для $(x_0, s) \in X$:

$$T^t(x_0, s) = \begin{cases} (x_0, s+t) & \text{при } -s \leq t < -s + f(x_0), \\ \left(T^n x_0, s+t - \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x_0)\right) & \text{при } -s + \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x_0) \leq t < - \\ & -s + \sum_{k=0}^n f(T^k x_0), \quad k=1, 2, \dots, \\ \left(T^{-n} x_0, s+t + \sum_{k=1}^n f(T^{-k} x_0)\right) & \text{при } -s - \sum_{k=1}^n f(T^{-k} x_0) \leq t < - \\ & -s - \sum_{k=1}^{n-1} f(T^{-k} x_0), \quad k=1, 2, \dots \end{cases}$$

Если нормировать меру в X , разделив ее на $\int f(x_0) \mu_0(dx_0)$, то X станет пространством Лебега, а $\{T^t\}$ — измеримым потоком в X . Этот поток называется специальным потоком, построенным по автоморфизму T и функции $f(x_0)$.

Зададим теперь измеримую матричную функцию $a(x)$, удовлетворяющую условию (2), и измеримую матричную функцию $b(x_0)$ такую, что

$$\ln^+ \|b^{\pm 1}(x_0)\| \in L^1(X_0, \mu_0).$$

Коцикл $n(t, x)$ определим как фундаментальную матрицу системы (1) на отрезке траектории $\{T^t(x_0, 0)\}$ от $t=0$ до $t=f(x_0)$. В момент перескока $t=f(x_0)$ значение $n(t-0, x) = \lim_{s \uparrow t} n(s, x)$ умножим на матрицу $b(x_0)$, далее все делается аналогично.

Такой коцикл удовлетворяет условию (5) § 2. Теоремы 1, 2, 3, 4 для него выполнены.

Заметим, что коциклы этого вида встречаются, например, в биллиардных задачах, где матрица $b(x_0)$ задает обычно закон отражения на границе.

Примеры недифференцируемых по t коциклов дает теория вероятностей. Например, одномерный мультипликативный коцикл $n(t, x) = e^{a(t, x)}$, где $a(t, x)$ — аддитивный коцикл, задаваемый формулой

$$a(t, x) = \int_0^t \xi(T^s x) ds,$$

где $\xi_t = \xi(T^t x)$ — стационарный гауссовский белый шум. В теории вероятностей этот коцикл называется и винеровским процессом или одномерным брауновским движением.

Рассмотрим теперь классические динамические системы. Мы будем понимать под классической динамической системой однопараметрическую группу $\{T^t\}$ абсолютно-непрерывных взаимно однозначных отображений гладкого многообразия M^m . Допустим, что существует мера μ , эквивалентная лебеговой мере, $\mu M^m = 1$, инвариантная относительно $\{T^t\}$.

Напомним, что параметр t пробегает либо все целые числа, либо все действительные числа.

Введем какую-нибудь гладкую риманову метрику в касательном расслоении. От $\{T^t\}$ потребуем, чтобы

$$\sup_{-1 \leq \theta \leq 1} \ln^+ \|dT_x^\theta\|^{\pm 1} \in L^1(X, \mu), \quad (4)$$

где dT_x^t — дифференциал отображения T^t в точке x .

В касательном расслоении введем систему координат с помощью m линейно независимых кусочно-непрерывных векторных полей. Касательное расслоение станет прямым произведением $N^m \times R^n$, $\{dT^t\}$ определит коцикл $n = n(t, x)$, который в силу (4) будет удовлетворять условию (5) § 2.

Таким образом, теоремы 1, 2, 3, 4 будут для него выполнены. Итак, классические динамические системы с интегральным инвариантом правильны по Ляпунову при весьма слабых ограничениях на их гладкость.

Пусть $e \in E_x^m$ — касательно пространству в точке x , а $\{T^t\}$ удовлетворяет условию (4). Тогда существует для почти всех x по мере μ точные показатели

$$\chi_{\pm}(e) = \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \|dT_x^t e\|.$$

Пусть

$$\begin{aligned} E^{k+} &= \{e : \chi_-(e) < 0\}, \\ E^{k-} &= \{e : \chi_+(e) < 0\}, \\ E^{k^0} &= \{e : \chi_+(e) = \chi_-(e) = 0\}. \end{aligned}$$

Расслоения E^{k+} , E^{k-} , E^{k^0} — измеримые подрасслоения касательного расслоения, причем из теоремы 4 следует, что

$$E^m = E^{k+} \oplus E^{k-} \oplus E^{k^0}. \quad (5)$$

Расслоение E^{k+} естественно назвать устойчивым при $t \rightarrow -\infty$, расслоение E^{k-} естественно назвать устойчивым при $t \rightarrow +\infty$, расслоение E^{k^0} естественно назвать нейтральным. Разложение (5) есть «огрубление» разложения, описанного в теореме 4. Это разложение инвариантно относительно однопараметрической группы $\{dT^t\}$.

§ 4. Мультипликативная эргодическая теорема. Доказательство

Рассмотрим сначала

$$\alpha(t, x) = \ln |\det n(t, x)|.$$

Это аддитивный коцикл, т. е.

$$\alpha(t+s, x) = \alpha(s, x) + \alpha(t, T^s x).$$

Отсюда,

$$\frac{1}{t} \alpha(t, x) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{[t]} \alpha(1, T^k x) + \frac{1}{t} \alpha(\{t\}, T^{[t]} x) \quad \text{при } t \geq 1.$$

В силу условия (5) § 2

$$\begin{aligned} \alpha(\{t\}, x) &\leq \ln^+ |\det n(\{t\}, x)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \ln^+ |\det n(\theta, x)| = \\ &= \varphi(x) \in L^1(X, \mu), \quad \alpha(\{t\}, x) = -\ln |\det n^{-1}(\{t\}, x)| \geq \\ &\geq -\ln^+ |\det n^{-1}(\{t\}, x)| \geq -\sup_{0 \leq \theta \leq 1} \ln^+ |\det n^{-s}(\theta, x)| = \psi(x) \in L^1(X, \mu). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{1}{t} \psi(T^{[t]} x) \leq \frac{\alpha(\{t\}, T^{[t]} x)}{t} \leq \frac{\varphi(T^{[t]} x)}{t},$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \alpha(\{t\}, T^{[t]} x) = 0,$$

так как $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(T^k x)}{k} = 0$, если $f(x) \in L^1(X, \mu)$.

Для $\alpha(1, x)$ справедлива оценка

$$\psi(x) \leq \alpha(1, x) \leq \varphi(x), \quad \text{т. е. } \alpha(1, x) \in L^1(X, \mu).$$

По эргодической теореме Биркгофа для почти всех x по мере μ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{[t]} \alpha(1, T^k x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(t, x)}{t}.$$

Аналогично, для почти всех x по мере μ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|t|} \alpha(t, x).$$

Мне неизвестно, существует ли измеримый аддитивный коцикл $\alpha(t, x)$ такой, что $\alpha(t, x) \in L^1(X, \mu)$ при каждом t , и для которого теорема Биркгофа неверна?

Итак, без ограничения общности можно считать, что $\det n(t, x) = 1$, так как

$$n(t, x) = \sqrt[m]{|\det n(t, x)|} n_1(t, x), \quad \det n_1(t, x) = 1.$$

Условие (5) § 2 при таком переходе сохраняется. В дальнейшем будут рассматриваться коциклы, для которых

$$\det n(t, x) = 1.$$

Заметим, что если a — унимодулярная матрица, то $\|a\| \geq 1$, т. е. в условии (5) § 2 можно вместо $\ln^+$ писать просто $\ln$.

Пусть коцикл n гомологичен по Ляпунову коциклу $\tilde{n}$. Если для n было выполнено условие (6) § 2, то оно выполнено для $\tilde{n}$, и наоборот. Кроме того легко проверяется, что если утверждения теорем 1, 2, 3, 4 верны для коцикла n , то они верны для гомологичного коцикла, если гомология ляпуновская.

Пусть $E^m = \bigoplus_{i=1}^r E^{k_i}$ — разложение, описанное в теореме 4. Выберем базис $e_1, e_2, \dots, e_m$ такой, что первые k_1 векторов ортогональны и лежат в E^{k_1} , следующие k_2 векторов ортогональны и лежат в E^{k_2} и т. д., норма каждого вектора из базиса равна 1, функции $e_1 = e_1(x)$, $e_2 = e_2(x)$, $\dots$, $e_m = e_m(x)$ измеримы. Обозначим через $C_E(x)$ матрицу перехода от стандартного базиса, в котором записан коцикл $n(t, x)$, к базису $e_1, e_2, \dots, e_m$.

Лемма. Матричная измеримая функция $C_E(x)$ — ляпуновская при $t \rightarrow \pm \infty$, т. е.

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|C_E^{\pm 1}(T^t x)\| = 0$$

для почти всех x по мере μ .

Очевидно, что $\|C_E(x)\|$ ограничена некоторой константой. Поэтому,

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|C_E^{-1}(T^t x)\| \geq 0.$$

Осталось показать, что

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} \ln \|C_E^{-1}(T^t x)\| = 0$$

для почти всех x по мере μ .

Так как матрица $C_E^{-1}(x)$ — это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_m$ к стандартному базису, причем векторы базиса, лежащие в $E_x^{k_i}$, образуют ортонормированный базис этого подпространства, то достаточно показать, что показатели синусов углов между подпространствами $E_{T^t x}^{k_i}$ и $E_{T^t x}^{k_j}$ равны нулю для всех i и j . Напомним, что косинусы углов между подпространствами $E_x^{k_i}$ и $E_x^{k_j}$ это собственные числа самосопряженного оператора $\sqrt{P_i \cdot P_j}$ в $E_x^{k_i}$, где P_i — ортогональное проектирование на $E_x^{k_i}$, P_j — ортогональное проектирование на $E_x^{k_j}$.

Пусть $j_{ij}(x)$ — произведение синусов углов между $E_x^{k_j}$ и $E_x^{k_i}$. Тогда

$$\lambda(E_x^{k_i} \oplus E_x^{k_j}, n(t, x)) = \lambda(E_x^{k_i}, n(t, x)) \lambda(E_x^{k_j}, n(t, x)) j_{ij}(T^t x).$$

Но

$$\chi(E_x^{k_i}; n) = k_i \chi_i, \quad \chi(n) = k_j \chi_j,$$

а

$$\chi(E_x^{k_i} \oplus E_x^{k_j}; n) = k_i \chi_i + k_j \chi_j,$$

так как если бы было меньше, то было бы

$$\chi\left(\bigoplus_{i=1}^r E_x^{k_i}; n\right) < \sum_{i=1}^r \chi(E_x^{k_i}; n) = 0,$$

что невозможно. Следовательно,

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|t|} j_{ij}(T^t x) = 0.$$

Так как показатель каждого из синусов неположителен, то все показатели синусов углов между $E_{T^t x}^{k_i}$ и $E_{T^t x}^{k_j}$ равны нулю. Лемма доказана.

Выведем теперь теорему 3 из теоремы 1 и 4.

По лемме существует ляпуновская гомология, которая приводит коцикл n к виду

$$n = \begin{pmatrix} n_1 & & & \\ & n_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & n_r \end{pmatrix},$$

где n_i — коцикл размерности k_i .

Очевидно, что теорему 3 достаточно доказать для n_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

Из-за равномерности, указанной в теореме 4, наименьшее сингулярное число матрицы $n_i(t, x)$ имеет показатель $\pm \chi_i$ при $t \rightarrow \pm \infty$, так как наименьшее сингулярное число достигается на некотором векторе (который, вообще говоря, зависит от t). Из-за той же теоремы 4 и свойства (4а) §1 показатель наибольшего сингулярного числа не превосходит $\pm \chi_i$ при $t \rightarrow \pm \infty$. Отсюда следует, что показатель каждого сингулярного числа матрицы n_i равен $\pm \chi_i$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

В теореме 4 утверждается равномерность указанных там пределов. Мы только что использовали это. Сейчас мы докажем, что из теоремы 1 и условия $\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) = -\chi_-(x, e; \mathfrak{N}) = \chi_i$ для $e \in E_x^{k_i}$ равномерность действительно следует.

Пусть $e_s, e_2, \dots, e_{k_i}$ — ортонормированный базис в $E_x^{k_i}$, а h_t — вектор, на котором достигается минимум по e выражения $\|\mathfrak{N}(t, x)e\|$, равный наименьшему сингулярному числу.

Здесь $\|e\| = 1$.

Пусть j_t — номер, для которого $|c_{j_t, t}| = \max_j |c_{j, t}|$. Ясно, что $|c_{j_t, t}| \geq \frac{1}{\sqrt{k_i}}$, так как $\sum_{j=1}^{k_i} c_{j, t}^2 = 1$.

Имеем

$$-c_{j_t, t} \cdot \mathfrak{N}(t, x) l_j = \sum_{j \neq j_t} c_{j, t} \mathfrak{N}(t, x) e_j - \mathfrak{N}(t, x) h_t. \quad (*)$$

Пусть $R_j^{k_i-1}$ — подпространство, порожденное векторами $e_1, e_2, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{k_i}$.

Функция j_t принимает лишь конечное число значений, чем мы и воспользуемся.

Пусть ρ_t — расстояние от $\mathfrak{N}(t, x) e_{j_t}$ до $\mathfrak{N}(t, x) R_{j_t}^{k_i-1}$, тогда из (*) следует, что

$$\|\mathfrak{N}(t, x) h_t\| \geq |c_{j_t, t}| \rho_t.$$

Далее,

$$\rho_t = \|\mathfrak{N}(t, x) h_t\|,$$

где φ_{j_t} — угол между вектором $\mathfrak{N}(t, x) e_{j_t}$ и подпространством $\mathfrak{N}(t, x) \times \times R_{j_t}^{k_i-1}$. Но

$$\chi_{\pm}(x, R_j^{k_i-1}) = \pm (k_i - 1) \chi_i$$

(см. (9) § 1), а так как

$$\lambda(E_x^{k_i}, \mathfrak{N}(t, x)) = \rho_t \lambda(R_{j_t}^{k_i-1}, \mathfrak{N}(t, x)),$$

то показатель $\sin \varphi_{j_t}$ равен 0 при $t \rightarrow \pm \infty$, ибо показатель $\|\mathfrak{N}(t, x) \cdot e_j\|$ равен $\pm \chi_i$ при $t \rightarrow \pm \infty$.

Итак, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и больших $|t|$

$$\|\mathfrak{N}(t, x) h_t\| \geq |c_{j_t, t}| e^{-\varepsilon|t|} e^{[\pm \chi_i - \varepsilon] \cdot |t|} \geq \frac{1}{\sqrt{k_i}} e^{|t|[\pm \chi_i - 2\varepsilon]}.$$

Это дает

$$\frac{1}{|t|} \ln \|\mathfrak{N}(t, x) h_t\| \geq \pm \chi_i - 3\varepsilon$$

при больших $|t|$, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \|\mathfrak{N}(t, x) h_t\| \geq \pm \chi_i.$$

Но

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \| \mathfrak{N}(t, x) h_t \| \leq \pm \chi_i.$$

Так как

$$\lambda(e^k, \mathfrak{N}(t, x)) \geq [\min_{e \in E_x^{k_i} \|e\|=1} \| \mathfrak{N}(t, x) \cdot e \|]^k,$$

то равномерность пределов доказана.

Допустим теперь, что теоремы 1, 2, 3, 4 доказаны для дискретного времени. Покажем, что теоремы 1, 2, 3, 4 справедливы и для непрерывного времени.

Пусть $\{T^t\}$ — измеримый поток. Рассмотрим группы $T^k = (T^1)^k$, где k пробегает все целые числа. Теоремы 1, 2, 3, 4 пусть для нее выполнены.

Из того, что

$$\mathfrak{N}(k + \theta, x) e = \mathfrak{N}(\theta, T^k x) \mathfrak{N}(k, x) \cdot e,$$

следуют неравенства

$$\| \mathfrak{N}(k + \theta, x) e \| \leq \| \mathfrak{N}(\theta, T^k x) \| \cdot \| \mathfrak{N}(k, x) \cdot e \|,$$

$$\frac{1}{k} \ln \| \mathfrak{N}(k + \theta, x) e \| \leq \frac{1}{k} \ln \| \mathfrak{N}(\theta, T^k x) \| + \frac{1}{k} \ln \| \mathfrak{N}(k, x) e \|,$$

где $k \geq 1$.

Но

$$\ln \| \mathfrak{N}(\theta, x) \| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \ln \| \mathfrak{N}(\theta, x) \| \in L^1(X, \mu).$$

поэтому

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \| \mathfrak{N}(k + \theta, x) e \| \leq \chi_i$$

для $e \in E_x^{k_i}$ равномерно по θ , $0 \leq \theta \leq 1$. Отсюда

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \| \mathfrak{N}(t, x) \cdot e \| \leq \chi_i$$

для $e \in E_x^{k_i}$.

Поскольку $\sum_{i=1}^r k_i \chi_i = 0$, то из последнего соотношения следует, что коцикл $\mathfrak{N}(t, x)$ правилен.

По теореме §1 отсюда следует, что существуют точные показатели всех порядков, к тому же

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \| \mathfrak{N}(t, x) e \| = \chi_i$$

для $e \in E_x^{k_i}$.

Аналогичный вывод для $t \rightarrow -\infty$ показывает, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \| \mathfrak{N}(t, x) \cdot e \| = \pm \chi_i$$

для $e \in E_x^{k_i}$.

Именно это последнее свойство показывает, что расслоение инвариантно относительно потока $\{T^t\}$. Все остальное теперь получается автоматически. Итак, теоремы 1, 2, 3, 4 для непрерывного времени следуют из таких же теорем для дискретного времени.

Соответствующий вывод мы провели, используя условие (5) § 2. Мне неизвестно, можно ли заменить это условие на условие вида

$$\ln^+ \|\mathfrak{R}^{\pm 1}(t, x)\| \in L^1(X, \mu)$$

при каждом t .

Грубо говоря, затруднение заключается в том, что нет доказательства эргодической теоремы Биркгофа для интегрируемых аддитивных коциклов (в общем случае).

Далее рассматривается случай дискретного времени:

$$T^t = (T)^t, \quad \text{где } T = T^1.$$

Без ограничения общности можно предположить, что T — эргодический автоморфизм.

Дальнейшее содержание этого параграфа — доказательство теорем 1, 2, 3, 4 в дискретном случае, причем достаточно доказать лишь теоремы 1 и 4.

Предположим сначала, что $\mathfrak{R}(t, x)$ — нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами.

В доказательстве мы используем прием А. М. Ляпунова построения «главного базиса» (см. [1], [2]).

Рассмотрим стандартный базис в R^m . Обозначим через h^k подпространство, порожденное векторами $e_m, e_{m-1}, \dots, e_{m-k+1}$ стандартного базиса.

Ясно, что $\mathfrak{R}(t, x) \cdot h^k = h^k$, или, по-другому, измеримое расслоение $H^k = X \times h^k$ инвариантно относительно группы измеримых изоморфизмов $\{\tilde{T}^t\}$:

$$\tilde{T}^t(x, e) = (T^t x, \mathfrak{R}(t, x) \cdot e).$$

Кроме того,

$$\mathfrak{R}(t, x) \cdot e_{m-k} = n_i^{(m-k)} \cdot e_{m-k} + \hat{e}(x),$$

где $\hat{e}(x) \in h^k$, а $n_i^{(i)}(x)$ — i -ый диагональный элемент матрицы $\mathfrak{R}(t, x)$.

Для диагональных элементов имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln n_i^{(i)}(x) = \pm \int_X \ln n_i^{(i)}(x) \mu(dx)$$

для почти всех x по мере μ . Это следует из того, что

$$\frac{1}{t} \ln n_i^{(i)}(x) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \ln n_1^{(i)}(T^k x), \quad t \geq 1,$$

$$\frac{1}{|t|} \ln n_i^{(i)}(x) = \frac{-1}{|t|} \sum_{k=-1}^t \ln n_1^{(i)}(T^k x), \quad t \leq -1.$$

Пусть $k(\chi)$ — число повторений числа χ в ряду чисел

$$\int_X \ln n_1^{(i)}(x) \mu(dx), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

С $k(\chi)$ связан набор (χ_i, k_i) , $i = 1, 2, \dots, r$.

Мы будем доказывать, в частности, что (χ_i, k_i) — спектр характеристических показателей группы $\{\tilde{T}^t\}$. Доказательство будет вестись индукцией по m .

Обозначим через $n_t(x)$ ограничение матрицы $\mathfrak{N}(t, x)$ на h^{m-1} , т. е. отбросим в $\mathfrak{N}(t, x)$ первый столбец и первую строку. Определитель матрицы $n_t(x)$ равен $[n_1^{(1)}(x)]^{-1}$. Условие (5) § 2 для нее выполнено.

Предположим, что

$$H^{m-1} = \bigoplus_{i=1}^s E^{\widehat{k}_i}, \quad \widehat{\chi}_i = \chi_+(e) = -\chi_-(e)$$

для $e \in E_x^{\widehat{k}_i}$, причем каждое $\widehat{\chi}_i$ есть одно из чисел

$$\int_X \ln n_1^{(i)}(x) \mu(dx), \quad i = m, m-1, \dots, 2,$$

с соответствующей кратностью $\widehat{k}_i$, т. е. разложение определено по функции $\widehat{k}(\chi)$, равной числу повторений числа χ в указанном ряду.

Пусть χ — показатель функции $n_1^{(1)}(x)$, тогда

$$\sum_{k_i=1}^s \widehat{k}_i \cdot \widehat{\chi}_i = -\chi,$$

так как $\det \mathfrak{N}(t, x) = 1$.

Остается найти такую измеримую функцию $e(x)$ со значениями в R^m , что для почти всех x по мере μ

$$\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) = -\chi_-(x, e; \mathfrak{N}) = \chi.$$

Если такую функцию построить, то теорема будет доказана, так как для $m = 1$ она верна.

Определим вектор $\widehat{e}_t(x)$ и функцию $\lambda_t(x)$ формулой:

$$\mathfrak{N}(t, x) \cdot e_1 = \lambda_t(x) \cdot e_1 + \widehat{e}_t(x), \quad \widehat{e}_t(x) \in h^{m-1}. \quad (1)$$

Ясно, что $\lambda_t(x) = n_1^{(1)}(x)$.

Если под $e_1, e_2, \dots, e_m$ понимать стандартный базис расслоения $X \times R^m$, то $\widehat{e}_t(x) \in H_{T^t x}^{m-1}$ для почти всех x по мере μ . Точнее, надо было бы вместо (1) писать

$$\tilde{T}^t e_1 = \lambda_t(x) \cdot e_s + \widehat{e}_t(x).$$

Из (1) получаем рекуррентное соотношение:

$$\widehat{e}_t(x) = \lambda_{t-1}(x) \cdot \widehat{e}_s(T^{t-1}x) + \mathfrak{N}(1, T^{t-1}x) \cdot \widehat{e}_{t-s}(x), \quad t \geq 1. \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lambda_t(x) e_1 + \widehat{e}_t(x) &= \mathfrak{N}(t, x) e_1 = \mathfrak{N}(1, T^{t-1}x) \mathfrak{N}(t-1, x) e_1 = \\ &= \mathfrak{N}(1, T^{t-1}x) [\lambda_{t-1}(x) e_1 + \widehat{e}_{t-1}(x)] = \lambda_t(x) e_1 + \\ &+ [\lambda_{t-1}(x) \cdot \widehat{e}_1(T^{t-1}x) + \mathfrak{N}(1, T^{t-1}x) \widehat{e}_{t-1}(x)]. \end{aligned}$$

Из (2) получаем, что

$$\widehat{e}_t(x) = \sum_{k=0}^{t-1} n_t(x) n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \widehat{e}_1(T^k x), \quad t \geq 1. \quad (3)$$

Действительно, легко проверить, что $\widehat{e}_t(x)$ из (3) удовлетворяет (2), а единственность очевидна.

Совершенно аналогично (2) и (3) имеем, что

$$\widehat{e}_t(x) = \sum_{k=-1}^t n_t(x) n_k^{-1}(x) \lambda_{k+1}(x) \widehat{e}_{-1}(T^k x), \quad t \leq -1. \quad (4)$$

(4) выводится из рекуррентного соотношения:

$$\widehat{e}_t(x) = \lambda_{t+1}(x) \widehat{e}_{-1}(T^{t+1}x) + \mathfrak{N}^{-1}(1, T^t x) \widehat{e}_{t+1}(x), \quad t \leq -1. \quad (5)$$

Векторы $\widehat{e}_1(x)$ и $\widehat{e}_{-1}(x)$ связаны соотношением

$$\widehat{e}_{-1}(x) = -\lambda_1^{-1}(T^{-1}x) \mathfrak{N}^{-1}(1, T^{-1}x) \widehat{e}_1(T^{-1}x). \quad (5')$$

Рассмотрим теперь векторы вида

$$e = e_1 + \widetilde{e},$$

где $\widetilde{e} \in H^{m-1}$.

$$\mathfrak{N}(t, x) e = \mathfrak{N}(t, x) e_1 + n_t(x) \widetilde{e} = \lambda_t(x) e_1 + \widehat{e}_t(x) + n_t(x) \widetilde{e}(x).$$

Справедливо неравенство $\|\mathfrak{N}(t, x) e\| \geq \lambda_t(x)$, так как e_1 ортогонален вектору $\widehat{e}_t(x) + n_t(x) \widetilde{e}$. Поэтому,

$$\chi_{\pm}(x, e) \geq \lim_{t \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{|t|} \ln \lambda_t(x) = \pm \chi.$$

Пусть $\widehat{e}_t^{(i)}(x)$ — проекция вектора $\widehat{e}_t(x)$ на подпространство $E_{T^t x}^{\widehat{k}_i}$, отвечающая разложению

$$H^{m-1} = \bigoplus \sum_{i=1}^s E_{\widehat{k}_i}^{\widehat{k}_i}.$$

Тогда

$$\widehat{e}_t^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{t-1} n_t(x) n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \widehat{e}_1^{(i)}(T^k x), \quad t \geq 1.$$

Покажем, что при произвольном $\widehat{e}_1^{(i)}(x)$, если $\chi_i \leq \chi$ показатель функции $\|\widehat{e}_1^{(i)}(x)\|$ не превосходит χ . Отображение, связанное с матрицей $n_{k+1}^{-1}(x)$, переводит слой над точкой $T^{k+1}x$ в слой над точкой x , причем

$$\frac{1}{k} \ln \lambda(n_{k+1}^{-1}(x)) \rightarrow -\widehat{\chi}_i$$

при $k \rightarrow +\infty$ равномерно по всем одномерным направлениям e^1 . Это вытекает из теоремы 4.

В частности,

$$\|n_{k+1}^{-1}(x) \widehat{e}_1(T^k x)\| \leq e^{-k[\widehat{\chi}_i - \varepsilon]} \|\widehat{e}_1^{(i)}(T^k x)\|.$$

Покажем, что показатель функции $\|\widehat{e}_1^{(i)}(T^k x)\|$ не превосходит нуля. Мы можем считать, что в разложении

$$H^{m-1} = \bigoplus_{i=1}^s E_i^{\widehat{\chi}_i}$$

слагаемые ортогональны, сделав, если это нужно, ляпуновскую гомологию (см. начало этого параграфа).

Далее очевидно, что

$$\|\widehat{e}_1(x)\| \leq \|\mathfrak{N}(1, x)\| + \lambda_1(x) \leq 2\|\mathfrak{N}(1, x)\|,$$

ибо

$$\widehat{e}_1(x) = \mathfrak{N}(1, x) e_1 - \lambda_1(x) e_1.$$

Так как слагаемые ортогональны, то

$$\|\widehat{e}_1^{(i)}(T^k x)\| \leq 2\|\mathfrak{N}(1, T^k x)\|.$$

Если бы гомологии не было, то

$$\|\mathfrak{N}(1, T^k x)\| \leq e^{k\varepsilon}$$

при $k \rightarrow +\infty$, так как $\ln \|\mathfrak{N}(1, x)\| \in L^1(X, \mu)$.

При ляпуновской гомологии коцикл $\mathfrak{N}$ переходит в коцикл $\widetilde{\mathfrak{N}}$:

$$\widetilde{\mathfrak{N}}(t, x) = C^{-1}(T^t x) \mathfrak{N}(t, x) C(x).$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{\mathfrak{N}}(1, T^k x)\| \leq \|C^{-1}(T^{k+1} x)\| \|\mathfrak{N}(1, T^k x)\| \|C(T^k x)\| \leq e^{k\varepsilon} e^{k\varepsilon} e^{k\varepsilon} = e^{3k\varepsilon},$$

ибо гомология ляпуновская. В результате

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \|\widehat{e}_1^{(i)}(T^k x)\| \leq 0.$$

Вектор $n_{k+1}^{-1}(x) \widehat{e}_1^{(i)}(T^k x) \in E_x^{\widehat{\chi}_i}$, поэтому при больших он растянется на более чем в $e^{t[\widehat{\chi}_i + \varepsilon]}$ раз при применении матрицы $n_t(x)$ (некоторая неточность

в записи заключается в том, что вместо матриц надо было бы писать отображения и т. д., но это не так существенно). Поэтому

$$\left\| \sum_{k=0}^{t-1} n_t(x) n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \widehat{e}_1^{(i)}(T^k x) \right\| \leq j e^{t[\widehat{\chi}_i + \varepsilon]} \sum_{k=0}^{t-1} e^{-k[\widehat{\chi}_i - \varepsilon]} e^{k[\chi + \varepsilon]} e^{k\varepsilon},$$

так как $\lambda_k(x) = e^{k \frac{1}{k} \ln \lambda_k(x)} \leq e^{k[\chi + \varepsilon]}$ при больших k . Здесь j — некоторая константа.

Отсюда,

$$\|\widehat{e}_t^{(i)}(x)\| \leq j_1 t e^{t[\widehat{\chi}_i + \varepsilon]} e^{-t[\widehat{\chi}_i - \varepsilon]} e^{t[\chi + 2\varepsilon]} = j_1 t e^{t[\chi + 4\varepsilon]},$$

т. е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\widehat{e}_t^{(i)}(x)\| \leq \chi.$$

Пусть теперь $\widehat{\chi}_i$ таково, что $\widehat{\chi}_i > \chi$.

Рассмотрим вектор $\widetilde{e}(x) \in H_x^{m-1}$ такой, что

$$\widetilde{e}^{(i)}(x) = - \sum_{k=0}^{+\infty} n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \widehat{e}_1^{(i)}(T^k x). \quad (**)$$

Выше было доказано, что норма k -того члена не превосходит $e^{k[\chi - \widehat{\chi}_i + \varepsilon]}$ при больших k . Это обеспечивает сходимость ряда. Далее

$$\widehat{e}_t^{(i)}(x) + n_t(x) \widetilde{e}^{(i)}(x) = - \sum_{k=t}^{+\infty} n_t(x) n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \widehat{e}_1^{(i)}(T^k x).$$

Отсюда

$$\|\widehat{e}_t^{(i)}(x) + n_t(x) \widetilde{e}^{(i)}(x)\| \leq j_2 e^{t[\widehat{\chi}_i + \varepsilon]} e^{t[\chi - \widehat{\chi}_i + \varepsilon]} = e^{t[\chi + 2\varepsilon]},$$

т. е.

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\widehat{e}_t^{(i)}(x) + n_t(x) \widetilde{e}^{(i)}(x)\| \leq \chi.$$

Напомним, что

$$\mathfrak{N}(t, x) e = \lambda_t(x) e_1 + \widehat{e}_t(x) + n_t(x) \widetilde{e}(x),$$

если

$$e = e_1 + \widetilde{e}.$$

Пусть $\widetilde{e}^{(i)}(x)$ — проекция вектора $\widetilde{e}(x)$ на $E_x^{k_i}$ определяется формулой (***) для тех i , для которых

$$\widehat{\chi}_i > \chi.$$

Тогда из предыдущего следует, что

$$\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) \geq \chi, \quad \chi_+(x, e; \mathfrak{N}) \leq \chi,$$

так как χ — показатель функции $\lambda_t(x)$. Т. е. $\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) = \chi$. Таким образом, мы уже доказали правильность коцикла при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим теперь, что у $\widetilde{e}(x)$ однозначно (по формуле (**)) определяются лишь те компоненты, для которых $\widehat{\chi}_i > \chi$.

При $t \rightarrow -\infty$ функция $\lambda_t(x)$ имеет показатель $\chi_- = -\chi$. Показатель расслоения $E_{\hat{k}_i}^k$ при $t \rightarrow -\infty$ равен $-\hat{\chi}_i$. Поэтому, если

$$\chi > \hat{\chi}_i,$$

то

$$\chi_- < (-\hat{\chi}_i),$$

а если

$$\chi \leq \hat{\chi}_i,$$

то

$$\chi_- \geq (-\hat{\chi}_i).$$

Отсюда возникает правило выбора компонент $\tilde{e}^{(i)}(x)$ вектора $\tilde{e}(x)$: для $\chi \neq \hat{\chi}_i$ компонента выбирается либо в виде

$$-\sum_{k=0}^{+\infty} n_{k+1}^{-1}(x) \lambda_k(x) \hat{e}_1^{(i)}(T^k x)$$

либо в виде

$$-\sum_{k=-1}^{-\infty} n_k^{-1}(x) \lambda_{k+1}(x) \hat{e}_{-1}(T^k x).$$

(Случай, когда $t \rightarrow -\infty$, разбирается аналогично случаю, когда $t \rightarrow +\infty$. Вместо (3) используется (4)).

Для $\chi = \hat{\chi}_i$ компонента выбирается произвольно. При таком выборе компонент получим

$$\begin{aligned} \chi_+(x, e; \mathfrak{N}) &\leq \chi, \quad \chi_-(x, e; \mathfrak{N}) \leq \chi_- = -\chi, \\ e &= e_1 + \tilde{e}. \end{aligned}$$

Как уже упоминалось,

$$\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) \geq \chi, \quad \chi_-(x, e; \mathfrak{N}) \geq -\chi,$$

т. е.

$$\chi_+(x, e; \mathfrak{N}) = -\chi_-(x, e; \mathfrak{N}) = \chi.$$

Из этого равенства и предположения индукции сразу следует правильность коцикла $\mathfrak{N}$ при $t \rightarrow \pm \infty$, так как взяв в $E_x^{\hat{k}_i}$ линейно независимые векторы

$$e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,\hat{k}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

и добавив к ним вектор e , мы получим базис, для которого сумма как положительных, так и отрицательных показателей равна нулю. Если χ не совпадает ни с одним из $\hat{\chi}_i$, то положим $E_x^1 = \{je\}$, если $\chi = \hat{\chi}_i$ для некоторого i , то за $E_x^{\hat{k}_i+1}$ надо взять подпространство, порожденное $E_x^{\hat{k}_i}$ и вектором e . Легко проверить теперь, что все что утверждалось, выполнено.

Итак, для треугольной матрицы теоремы 1, 2, 3, 4 доказаны.

Рассмотрим теперь общий случай, когда, $\mathfrak{N}(t, x)$ не является, вообще говоря, треугольной матрицей. Основная идея в этом случае такова. Если бы мы нашли ляпуновскую гомологию, такую, что коцикл

$$\hat{\mathfrak{N}}(t, x) = C^{-1}(T^t x) \mathfrak{N}(t, x) C(x)$$

есть треугольный коцикл, то все было бы сделано, ибо если теоремы 1, 2, 3, 4 есть для коцикла $\hat{\mathfrak{N}}$, то они выполняются и для коцикла $\mathfrak{N}$.

Так как не всякий коцикл $\mathfrak{N}$ гомологичен треугольному, то нужны какие-то дополнительные соображения. Мы покажем, что над некоторым расширением группы $\{T^t\}$ коцикл $\mathfrak{N}$ все-таки гомологичен треугольному, что и дает нужный результат.

Рассмотрим измеримое главное расслоение

$$\hat{X} = X \times SO(m, R).$$

Определим группу $\{\hat{T}^t\}$ измеримых преобразований пространства $\hat{X}$:

$$\hat{T}^t(x, u) = (T^t x, \hat{u}(t, x, u)), \quad (6)$$

где $\hat{u}(t, x, u)$ однозначно определяется из соотношения

$$\mathfrak{N}(t, x)u = \hat{u}(t, x, u)\hat{\mathfrak{N}}(t, x, u). \quad (7)$$

Здесь $\hat{\mathfrak{N}}(t, x, u)$ — нижняя треугольная матрица с положительными элементами.

Заметим, что $\hat{u}(t, x, u)$ измерима по x и непрерывна по u . Преобразование $\hat{T}$ есть измеримое расширение для автоморфизма T , т. е. T есть фактор-автоморфизм измеримого преобразования $\hat{T}$ по измеримому разбиению ζ на элементы $x \times SO(m, R)$.

$\hat{T}$ — есть взаимно однозначное преобразование mod 0 (по мере μ).

Рассмотрим множество K вероятностных мер $\hat{\mu}$ на σ -алгебре измеримых множеств пространства $\hat{X}$ таких, что

$$\hat{\mu}(A \times SO(m, R)) = \mu(A),$$

где A — любое измеримое множество из X . Т. е. $\hat{\mu} \in K$, если фактор-мера по измеримому разбиению ζ совпадает с μ . K — выпуклое множество в линейном пространстве мер с ограниченной вариацией. Так как $SO(m, R)$ — компакт, то K — компактное множество в топологии слабой сходимости [5]. $\hat{T}$ действует на меры по формуле:

$$(\hat{T}\hat{\mu})(A) = \hat{\mu}(\hat{T}A).$$

При этом $\hat{T}$ — линейный ограниченный оператор и

$$\hat{T}K = K.$$

По теореме Тихонова о неподвижной точке [5] множество неподвижных точек оператора $\hat{T}$ в K непусто.

Далее, через $\hat{\mu}$ обозначается любая инвариантная относительно $\hat{T}$ мера из K , т. е.

$$\hat{\mu}(\hat{T}A) = \hat{\mu}(A), \quad \hat{\mu}(A \times SO(m, R)) = \mu(A). \quad (8)$$

Определим функцию $u(\hat{x})$ на $\hat{X}$ формулой:

$$u(\hat{x}) = u$$

для

$$\widehat{x} = (x, u).$$

Теперь (7) можно переписать так:

$$\widehat{\mathfrak{N}}(t, x, u) = u^{-1}(\widehat{T}^t(x, u)) \mathfrak{N}(t, x) u(x, u), \quad (9)$$

если учесть, что

$$u(\widehat{T}^t(x, u)) = \widehat{u}(t, x, u).$$

Для треугольного коцикла $\widehat{\mathfrak{N}}$ относительно динамической системы $\{\widehat{T}^t\}$ с мерой $\widehat{\mu}$ теоремы 1, 2, 3, 4 выполнены, так как выполнено условие (5) § 2, как это следует из (9).

Кроме того, из (9) следует, что

$$\chi_{\pm}(x, e; \mathfrak{N}) = \chi_{\pm}(\widehat{x}, u^{-1}(\widehat{u}); \widehat{\mathfrak{N}}). \quad (10)$$

Поэтому, если

$$u^{-1}(\widehat{x})e \in E_{\widehat{x}}^{k_i},$$

то

$$\chi_{\pm}(x, e; \mathfrak{N}) = \pm \chi_i.$$

Таким образом, подпространство $u(\widehat{x})E_{\widehat{x}}^{k_i}$ зависит лишь от x , откуда

$$x \times R^m = \bigoplus_{i=1}^r E_x^{k_i}, \quad (11)$$

где

$$E_x^{k_i} = u(\widehat{x})E_{\widehat{x}}^{k_i} = uE_{(x,u)}^{k_i}.$$

Так как меры μ и $\widehat{\mu}$ согласованы в силу (8), то разложение (11) определено для почти всех x по мере μ .

Итак, мы имеем разложение

$$E^m = \bigoplus_{i=1}^r E^{k_i},$$

для которого выполнены утверждения теорем 1, 2, 3, 4.

Отметим, что единственный существенный факт, нужный для доказательства правильности функции $\mathfrak{N}(t, x)$ как функции от t при фиксированном x , заключается в том, что в слое

$$x \times SO(m, R)$$

найдется точка $\widehat{x}$, в которой выполнена теорема Биркгофа для логарифмов диагональных элементов матрицы $\widehat{\mathfrak{N}}(I, \widehat{x})$. Это так для почти всех x по мере μ . Доказательство теоремы закончено.

Результаты настоящей работы были опубликованы без доказательства в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., Гос-техиздат, 1950.
 2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М. и Немыцкий В. В., Теория показателей Ляпунова, М., «Наука», 1966.
 3. Furstenberg H., Kesten H., Products of random matrices, Ann. Math. Stat., 31, No. 2 (1960), 457—469.
 4. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. М., «Наука», 1966.
 5. Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. М., ИЛ, 1962.
 6. Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. нов. сер., 25, вып. 1 (1949), 107—160.
 7. Рохлин В. А., Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, УМН, 15, вып. 4 (1960), 3—26.
 8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1958.
 9. Оселедец В. И., Усиленный закон больших чисел для случайных матричных процессов, Тезисы, М., И СМ, 1966.
-